Tutorato Analisi II - 26/06/23

Esercizio $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq z,\ x^2+y^2+z^2 \leq 20\}$

Calcolare il volume di S

Soluzione (parziale)

$$\mathrm{vol}(S) = \iiint_S dx\,dy\,dz =$$

$$x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{20-x^2-y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2+y^2 \leq 20$$

$$= \iint \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{20-x^2-y^2}} dz\,dx\,dy$$

dove variano x,y ?

- $x^2+y^2 \leq 20$
- $x^2+y^2 \leq \sqrt{20-x^2-y^2}$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$$

$$\rho^2 \leq \sqrt{20-\rho^2} \implies \rho^4 \leq 20-\rho^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{-\sqrt{20-\rho^2} \leq} \rho^2 \leq \sqrt{20-\rho^2}$$

$$\rho^4 + \rho^2 - 20 \le 0$$

Chiamo $u = \rho^2 \rightsquigarrow u^2 + u - 20 \le 0$

$$\Delta = 81 = 9^2$$

$$-5 = \frac{-1-9}{2} \le u \le \frac{-1+9}{2} = 4$$

$$-5 \le u = \rho^2 \le 4$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho^2 \le 4$$

$$\Updownarrow \quad \rho \ge 0$$

$$\boxed{0 \le \rho \le 2}$$

$$\begin{cases} -2 \le \rho \le 2 \\ \rho \ge 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{vol}(S) = \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4\}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{20-(x^2+y^2)}} dz \, dx\,dy =$$

$$= \iint_{\{x^2+y^2 \le 4\}} \left[\sqrt{20-(x^2+y^2)} - (x^2+y^2)\right] dx\,dy =$$

coordinate polari

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{20-\rho^2} - \rho^2\right) \rho \, d\theta \, d\rho = \dots$$

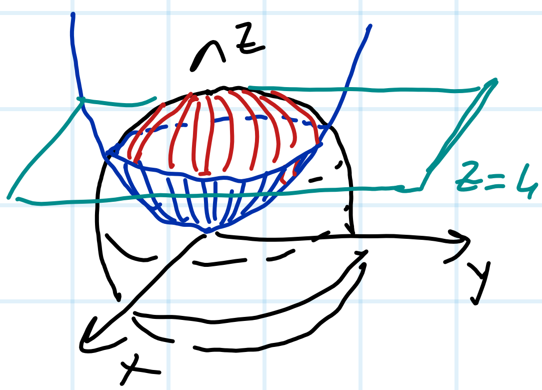
lo sapete fare

Esercizio Calcolare l'area della superficie costituita dal bordo di S.

Soluzione (parziale)

Dobbiamo parametrizzare il bordo di S:

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{20-(x^2+y^2)} \}$$



$z = x^2+y^2$ ← paraboloide

$z = \sqrt{20-(x^2+y^2)}$ ← sfera

$$\text{Area}(\partial S) = \text{Area}(\text{pezzo di paraboloide}) + \text{Area}(\text{pezzo di sfera})$$

$$x^2+y^2 = \sqrt{20-(x^2+y^2)}$$

l'abbiamo risolta prima. $x^2+y^2 = 4$

Alla quota $z=4$, l'intersezione è una circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2

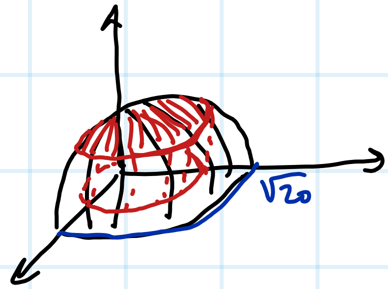
Parametrizziamo: $D_{\sqrt{20}}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 20\}$

Pezzo di sfera: $f : D_{\sqrt{20}}(0) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(u,v) = \left(u, v, \sqrt{20-u^2-v^2}\right)$$

$$x^2+y^2+z^2 \leq 20$$

$$z \leq \sqrt{20-x^2-y^2}$$



Il pezzo che ci interessa è quello che si ottiene facendo variare u, v in $u^2+v^2 \leq 4$.

$$\text{Area (pezzo di sfera)} = \int_S dS$$

La parametrizz. è $\varphi : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varphi(u,v) = \left(u, v, \sqrt{20-u^2-v^2}\right)$$

$$\varphi_u := \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{20-u^2-v^2}}\right)$$

$$\varphi_v := \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{20-u^2-v^2}}\right)$$

$e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

$$\varphi_u \times \varphi_v = \text{"}\det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \\ e_3 & \frac{-u}{\sqrt{20-u^2-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{20-u^2-v^2}} \end{pmatrix}\text{"} =$$

$$= e_3 + \frac{u}{\sqrt{20-u^2-v^2}} e_1 + \frac{v}{\sqrt{20-u^2-v^2}} e_2 =$$

$$= \left(\frac{u}{\sqrt{20-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{20-u^2-v^2}}, 1 \right)$$

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{\frac{u^2}{20-u^2-v^2} + \frac{v^2}{20-u^2-v^2} + 1} =$$

$$\left(= \sqrt{\|\nabla f\|^2 + 1} \quad \text{dove } f(u,v) = \sqrt{20-u^2-v^2} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{u^2+v^2+20-u^2-v^2}{20-u^2-v^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{20-u^2-v^2}}.$$

$$\text{Area (pezzo di sfera)} = \iint_{\{u^2+v^2 \le 4\}} \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du\, dv =$$

$$= \iint_{\{u^2+v^2 \le 4\}} \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{20-u^2-v^2}} \, du\, dv =$$

coord. polari

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{20-\rho^2}} \, \rho \, d\theta \, d\rho =$$

$$= (2\sqrt{5})\, 2\pi \int_0^2 \frac{\rho}{\sqrt{20-\rho^2}} \, d\rho =$$

$$= 4\pi\sqrt{5} \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}\right)(-2\rho)(20-\rho^2)^{-1/2} \, d\rho =$$

$$= -2\pi\sqrt{5} \left(\frac{(20-\rho^2)^{1/2}}{1/2} \right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= -2\pi\sqrt{5} \left(8 - 4\sqrt{5} \right) =$$

$$= 8\pi\sqrt{5} \left(\sqrt{5} - 2 \right).$$

Parametrizziamo il pezzo di paraboloide:

$z = x^2 + y^2$ per $0 \leq z \leq 4$.

lo vediamo come grafico della funzione

$$h(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\psi(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$$

$$\vdots$$

$$\| \psi_u \times \psi_v \| = \sqrt{\|\nabla h\|^2 + 1}$$

$$\text{Area (pezzo di paraboloide)} = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} \sqrt{\|\nabla h\|^2 + 1} \, dx\,dy =$$

$$\nabla h = (2x, 2y)$$

$$\|\nabla h\|^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} \sqrt{4(x^2+y^2) + 1} \, dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho \sqrt{4\rho^2 + 1} \, d\rho \, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^2 2\rho \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{4}} \, d\rho =$$

$$= 2\pi \left. \frac{\left(\rho^2 + \frac{1}{4}\right)^{3/2}}{3/2} \right|_0^2 =$$

$$= 2\pi \, \frac{2}{3} \left(\sqrt{(17/4)^3} - \sqrt{(1/4)^3} \right) =$$

$$= 2\pi \, \frac{2}{3} \left(\frac{17}{4} \frac{\sqrt{17}}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right) =$$

$$= 4 \frac{\pi}{3} \left(\frac{17\sqrt{17} - 1}{8} \right) = \frac{\pi}{6} \left(17\sqrt{17} - 1 \right).$$

Area cercata = Area(pezzo sfera) + Area(pezzo parabol.).

1. Sia $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-3)^2}{9} + (y-3)^2 \leq 1\right\}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = |x-3| + |y+1| + 2 \ .$$

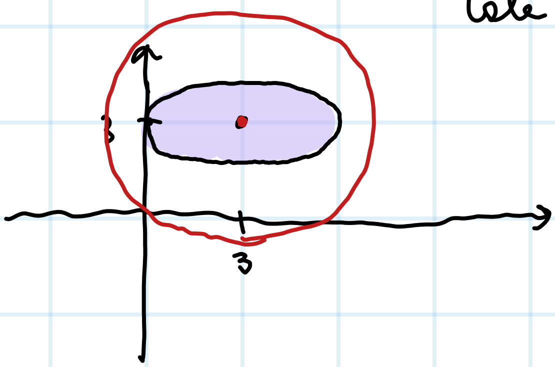
(a) Dire perché E è un insieme chiuso e limitato e scrivere una parametrizzazione di ∂E .

(b) Calcolare, dove esistono, le derivate parziali di f e trovare i punti del piano in cui non esistono.

(c) Provare che f non ha punti stazionari.

(d) Calcolare il massimo ed il minimo di f in E .

a) E è limitato : cioè esiste una palla $B((x_0,y_0),R)$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $E \subseteq B((x_0,y_0),R)$.



Basta prendere $B((3,3),R)$ con $R > 3$

E chiuso : modo rigoroso

chiamo $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \frac{(x-3)^2}{9} + (y-3)^2$$

F è continua

$$E = F^{-1}(\underbrace{(-\infty,1]}_{\text{chiuso}}) \Rightarrow E \text{ chiuso.}$$

$$\partial E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-3)^2}{9} + (y-3)^2 = 1 \right\}$$

Coordinate "quasi" polari:

$$x = 3 + \rho\, 3 \cos\theta$$
$$y = 3 + \rho \sin\theta$$

$\rho = 1$ perché vogliamo il bordo

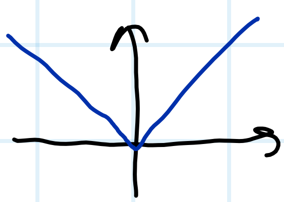
$\theta \in [0, 2\pi)$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y}{b} = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

b) $f(x,y) = |x-3| + |y+1| + 2$

$y = |x|$



NON è DERIVABILE in 0

Se $x \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ NON esiste per $x-3=0$

$x=3$

Se $x \neq 3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{|x-3|}{x-3} = \begin{cases} 1, & \text{se } x>3 \\ -1, & \text{se } x<3 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ NON esiste per $y=-1$

Se $y \neq -1$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{|y+1|}{y+1} = \begin{cases} 1, & \text{se } y>-1 \\ -1, & \text{se } y<-1 \end{cases}$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ non esiste per i punti $(3,y)$, $y \in \mathbb{R}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ " " " " $(x,-1)$, $x \in \mathbb{R}$

c) $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è punto STAZIONARIO se
$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{|x-3|}{x-3} , \frac{|y+1|}{y+1} \right) =$$

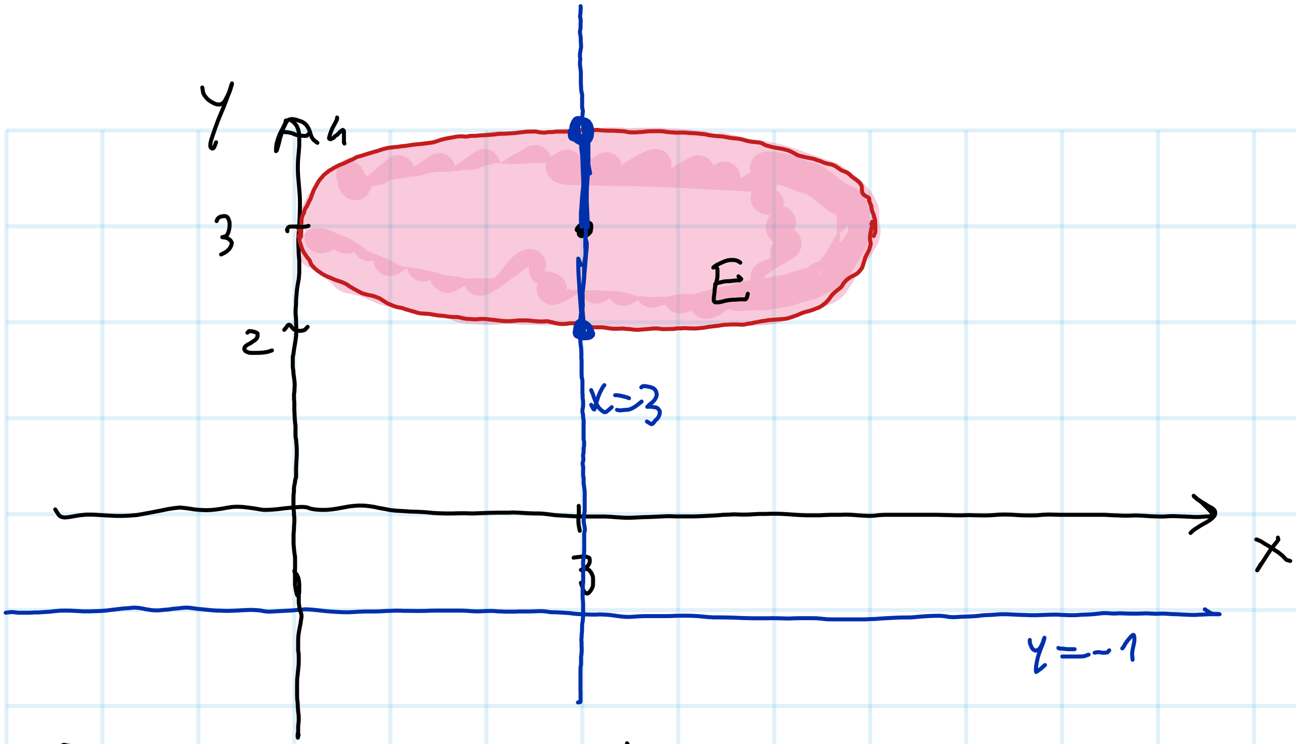
$x \neq 3$ $\quad$ $y \neq -1$

$$= \begin{cases} (1,1) & \text{se } x>3, y>-1 \\ (1,-1) & \text{se } x>3, y<-1 \\ (-1,1) & \text{se } x<3, y>-1 \\ (-1,-1) & \text{se } x<3, y<-1 \end{cases}$$

(non è definito per $x=3$ o $y=-1$)

in particolare $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$ per ogni (x_0,y_0) per cui è definito.

d) Calcolare $\max_E f$, $\min_E f$.



∇f non è definito per $x=3 \ \vee \ y=-1$

Step 1) Valutiamo f per $x=3$.

$$f(3,y) = |y+1| + 2$$

su E $\quad x=3 \Rightarrow (y-3)^2 \leq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -1 \leq y-3 \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \leq y \leq 4$$

$$\max_{(3,y)\in E} f = f(3,4) = 7$$

punti di E con $x=3$

$$\min_{(3,y)\in E} f = f(3,2) = 5$$

Step 2) Procedo come nel caso in cui f è differenziabile

Considero $(x,y) \in E$ con $x \neq 3$

So che $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ per questi (x,y), quindi cerco i massimi e i minimi sul bordo di E.

∂E è parametrizzato da

$$r(\theta) = (\underbrace{3 + 3\cos\theta}_{x(\theta)}, \underbrace{3 + \sin\theta}_{y(\theta)})$$

$\theta \in [0, 2\pi)$

(MA NON CONSIDERIAMO $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$)

quelli per cui $f(r(\theta))$ non è derivabile

$$f(r(\theta)) = f(x(\theta), y(\theta)) =$$

$$= |\underbrace{3\cos\theta}_{=0 \text{ se } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi}| + |\underbrace{4 + \sin\theta}_{>0}| + 2$$

$$= 3|\cos\theta| + \sin\theta + 6$$

Studiamo max e min di $f(r(\theta)) = g(\theta)$ al variare di $\theta \in [0, 2\pi)$.

Per $\theta = \pi/2, 3/2\pi$ la abbiamo già calcolata

$$g(\pi/2) = 7 \quad , \quad g(3/2\pi) = 5$$

$\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$:

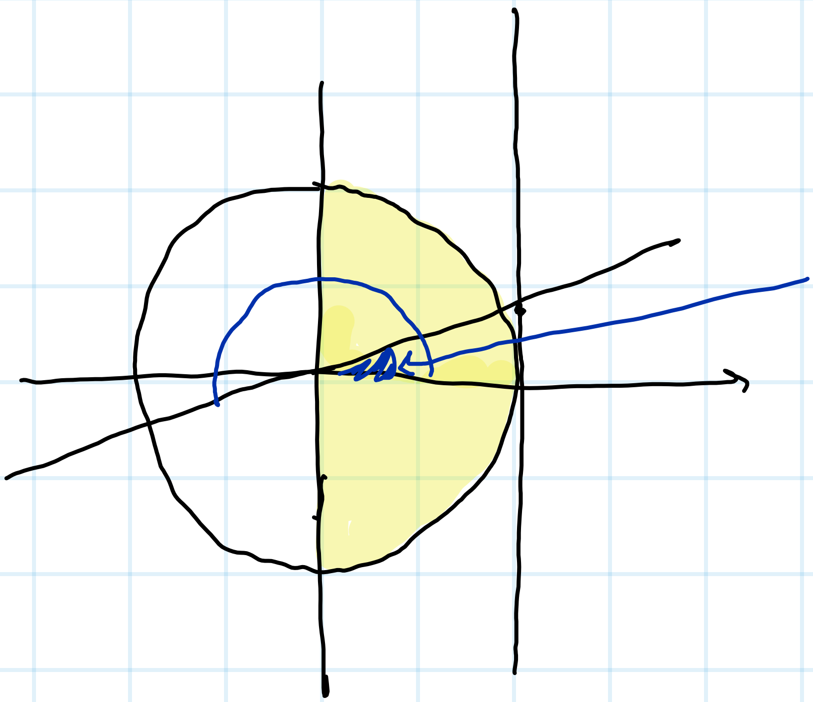
$$g'(\theta) = 3 \frac{|\cos\theta|}{\cos\theta}(-\sin\theta) + \cos\theta =$$

$$= \begin{cases} -3\sin\theta + \cos\theta & , \cos\theta > 0 \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \\ 3\sin\theta + \cos\theta & , \cos\theta < 0 \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

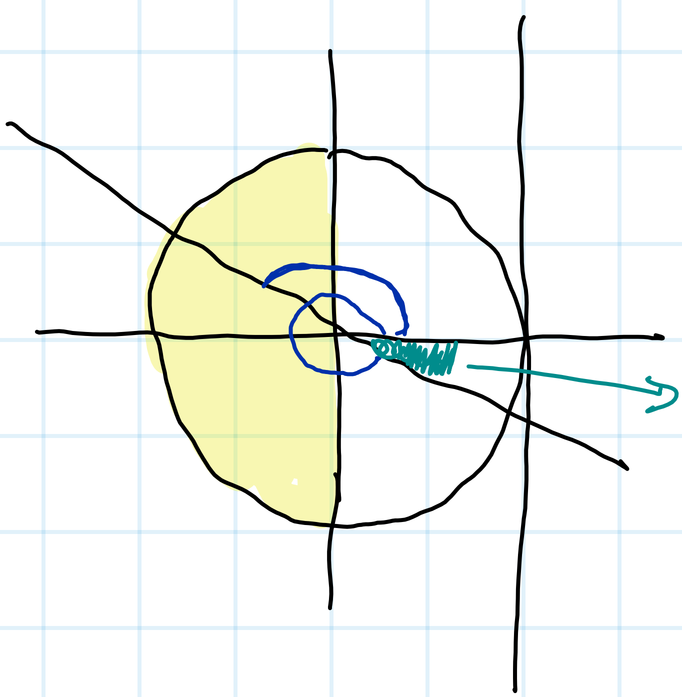
$$g'(\theta) = 0 \iff \begin{array}{l} \underline{3\sin\theta = \cos\theta \ , \ \cos\theta > 0} \\ 3\sin\theta = -\cos\theta \ , \ \cos\theta < 0 \end{array}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{3} \quad , \quad 0 \le \theta < \frac{\pi}{2} \lor \frac{3}{2}\pi < \theta \le 2\pi$$

$$\tan\theta = -\frac{1}{3} \quad , \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$$



$$\theta_1 = \arctan\frac{1}{3}$$



$$\theta_2 = \pi - \arctan\frac{1}{3}$$

$-\arctan\frac{1}{3}$

$$g(\theta_1) = 3\cos\theta_1 + \sin\theta_1 + 6 =$$

$\cos\theta_1 = 3\sin\theta_1$

$$= 9\sin\theta_1 + \sin\theta_1 + 6 =$$

$$= \underbrace{10\sin\left(\operatorname{arctan}\frac{1}{3}\right) + 6}_{>6}$$

$$\approx 9{,}1$$

(vedere l'OSSERVAZIONE all'ultima pagina)

$$g(\theta_2) = -3\cos\theta_2 + \sin\theta_2 + 6 =$$

$\cos\theta_1 = -3\sin\theta_1$

$$= +9\sin\theta_2 + \sin\theta_2 + 6 =$$

$$= 10\sin\left(\pi - \operatorname{arctan}\frac{1}{3}\right) + 6 =$$

$$= 10\sin\left(\operatorname{arctan}\frac{1}{3}\right) + 6 =$$

$$= g(\theta_1).$$

Step 3) Confrontiamo questi valori con quelli del caso in cui il gradiente non esiste.

$$\min_{(x,y)\in E} f = 5 < g(\theta_1)$$

$$\max_{(x,y)\in E} f = 7 < g(\theta_1)$$

In conclusione: $\min_{E} f = 5$

$$\max_{E} f = g(\theta_1) =$$

$$= 6 + 10 \sin\left(\arctan \frac{1}{3}\right).$$

OSSERVAZIONE (POST TUTORATO)

NON È NECESSARIO AI FINI ~~DELLO~~ DELLO SCRITTO !

Usando la formula $\sin\alpha = \pm \dfrac{|\tan\alpha|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

e sapendo che $0 < \arctan\frac{1}{3} < \pi$, si ottiene

$$\underbrace{\sin\left(\arctan\frac{1}{3}\right)}_{>0} = \frac{\tan(\arctan 1/3)}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan 1/3)}} =$$

$$= \frac{1/3}{\sqrt{1+(1/3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$